

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 2025.02.16 09:00:59  
Уникальный программный ключ:  
054c0182970293149c2169910009940292896864

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) «Вариационное исчисление» по направлению подготовки (специальности) 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» направленности (профилю) «Математические и алгоритмические основы интеллектуальных систем» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 1

## **Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**

### **Вариационное исчисление**

Направление подготовки (специальность)

**02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии**

Направленность (профиль)

**Математические и алгоритмические основы интеллектуальных систем**

Присваиваемая квалификация (степень)

**бакалавр**

Форма обучения

**очная**

Троицк, 2025 г.



## Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств
2. Перечень формируемых компетенций
  - 2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной
3. Содержание оценочных средств по дисциплине
  - 3.1. Виды оценочных средств
  - 3.2. Содержание оценочных средств
4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации
  - 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации
  - 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств
  - 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций



## 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Направление подготовки: *02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»*

Направленность (профиль): *Математические и алгоритмические основы интеллектуальных систем*

Дисциплина: *Вариационное исчисление*

Семестр изучения: *7*

Форма промежуточной аттестации: *зачет*

Для оценивания результатов используется балльно-рейтинговая система

## 2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

### 2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины «Вариационное исчисление» направлено на формирование следующих компетенций:

| Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО) | Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)  | Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП  | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине  |
|--|---|--|--|
| 1  | 2   | 3  | 4  |
| ОПК-1                                    | Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук<br>ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук<br>ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной | Знать: понятия, методы, теоремы и факты вариационного исчисления (для достижения ОПК-1.1)<br>Уметь: решать задачи вариационного исчисления (Для достижения ОПК-1.2)<br>Владеть: основными понятиями, теоремами, законами вариационного исчисления для решения задач профессиональной деятельности (для достижения ОПК-1.3) |



деятельности

### 3. СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

#### 3.1 Виды оценочных средств

| № п/п | Контролируемые темы/ разделы                      | Код компетенции/ планируемые результаты обучения | Наименование оценочного средства для текущего контроля                 | Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации    |
|-------|---|--|--|---|
| 1     | Метод вариаций в задачах с неподвижными границами | ОПК-1 (знания, умения, навыки)                   | Домашняя работа, лабораторная работа, контрольная работа, устный опрос | Зачет:<br>Устный опрос (вопросы 1-4)<br>Практическое задание    |
| 2     | Вариационные задачи с подвижными границами        | ОПК-1 (знания, умения, навыки)                   | Домашняя работа, лабораторная работа, контрольная работа, устный опрос | Зачет:<br>Устный опрос (вопросы 9-13)<br>Практическое задание   |
| 3     | Достаточные условия экстремума                    | ОПК-1 (знания, умения, навыки)                   | Домашняя работа, лабораторная работа, контрольная работа, устный опрос | Зачет:<br>Устный опрос (вопросы 5-8,14)<br>Практическое задание |
| 4     | Вариационные задачи на условный экстремум         | ОПК-1 (знания, умения, навыки)                   | Домашняя работа, лабораторная работа, контрольная работа, устный опрос | Зачет:<br>Устный опрос (вопросы 15-17)<br>Практическое задание  |
| 5     | Оптимальное управление и                          | ОПК-1 (знания, умения, навыки)                   | Домашняя работа,   | Зачет:<br>Устный опрос  |



|  |                   |  |   |   |
|--|-------------------|--|---|---|
|  | принцип максимума |  | лабораторная работа, контрольная работа, устный опрос | (вопросы 18-19)<br>Практическое задание |
|--|-------------------|--|---|---|

Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе по дисциплине. Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре и являются учебно-методическими материалами ограниченного (конфиденциального) пользования.

## 3.2 Содержание оценочных средств

Оценочные средства для промежуточной аттестации представлены базой контрольных вопросов и практических заданий.

### 3.2.1. База контрольных вопросов

1. Теорема Ферма. Необходимые и достаточные условия второго порядка для гладких задач без ограничений.
2. Вариация функционала. Задача классического вариационного исчисления.
3. Лемма Дюбуа-Реймона, уравнение Эйлера, интегралы импульса и энергии.
4. Лемма о скруглении углов.
5. Условие Лежандра – необходимое условие второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления.
6. Условие Якоби – необходимое условие второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления.
7. Усиленное условие Якоби – достаточное условие второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления.
8. Условие Вейерштрасса. Функция Вейерштрасса. Поле экстремалей.
9. Функционалы, зависящие от нескольких переменных.
10. Функционалы, зависящие от старших производных. Уравнение Эйлера-Пуассона.
11. Необходимые условия первого порядка в задаче Больца – уравнения Эйлера и условия трансверсальности.



12. Правило множителей Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств.

13. Необходимые условия второго порядка для гладких задач с ограничениями типа равенств.

14. Достаточные условия второго порядка для гладких задач с ограничениями типа равенств.

15. Управляемый процесс. Правило множителей Лагранжа для гладких задачи с ограничениями типа равенств и неравенств.

16. Изопериметрическая задача. Необходимые условия первого порядка.

17. Необходимые условия первого порядка в задаче Лагранжа – уравнения Эйлера-Лагранжа.

18. Простейшая задача оптимального управления.

19. Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления – принцип максимума Понтрягина.

### 3.2.2. База примерных практических заданий

1. Исследовать на экстремум с помощью необходимых и достаточных условий функционал:

$$I(x(t)) = \int_0^2 (t\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t)) dt, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = 0$$

2. Найти экстремаль функционала

$$I(x_1(t), x_2(t)) = \int_0^3 \sqrt{1 + \dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)} dt, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -2, \quad x_1(3) = 7, \quad x_2(3) = 1$$

3. Найти экстремаль функционала

$$I(x(t)) = \int_0^1 (3x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t)) dt,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 2, \quad \dot{x}(1) = 5$$

4. Найти экстремаль функционала удовлетворяющую граничному условию  $x(0) = 1$

$$I(x(t)) = \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt + 5x^2(1)$$



5. Найти экстремаль функционала  $I(x(t)) = \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt$  при условиях  $\int_0^1 x(t) dt = 1$ ,  $\int_0^1 tx(t) dt = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 0$
6. Найти допустимые экстремали в задаче  $\int_0^T (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow \min$ ,  $x(0) = 1$
7. Найти оптимальное управление в задаче  $\int_0^1 x dt \rightarrow \min$ ,  $|\ddot{x}| \leq 2$ ,  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

## 4. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация проводится в форме зачета в два этапа. На первом этапе студент получает практическое задание из базы практических заданий (требуется выполнить решение задачи по одному из разделов дисциплины). Продолжительность – 45 минут. На втором этапе студенту выдаётся теоретический вопрос по одному из разделов дисциплины из базы теоретических вопросов. Время выполнения – до 20 минут.

Альтернативный вариант: зачет и критерии оценивания согласно примерному билету



Вариационное исчисление (и оптимальное управление). Билет для зачёта №666. Студент \_\_\_\_\_

ФИО, группа

1. (0-5 баллов) Решить задачу Больца

$$\int_0^1 (x^2(t) + t^2 x(t)) dt + x^2(0) \rightarrow \text{extr.}$$

2. (0-5 баллов) Решить изопериметрическую задачу  $\int_0^{\pi/2} (x^2 - x') dt \rightarrow \text{extr.}$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos t dt = 4, x(0) = 0, x(\pi/2) = 0.$$

3. (0-10 баллов) Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^1 x e^t dt \rightarrow \text{extr.}, |\dot{x}| \leq 1, x(0) = 0.$$

Альтернативный вариант (зависит от билета) – задача Лагранжа

$$T \rightarrow \text{extr.}, \int_0^T \dot{x}^2 dt = 1, x(0) = x(T) = 0, \dot{x}(T) = 1.$$

4. (0-10 баллов) Решить задачу с подвижной границей  $\int_0^T x^2 dt \rightarrow \text{extr.}$

$$x(0) = 0, x^2(T) + 2 = 0.$$

5. (0-5 баллов) Решить задачу со старшими производными  $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr.}$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 1, x(1) = 0.$$

6. (0-5 баллов) Решить простейшую задачу вариационного исчисления

$$\int_0^1 (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + x_1 + x_2) dt \rightarrow \text{extr.}, x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(1) = x_2(1) = 1.$$

Во всех задачах требуется найти допустимое решение. Проверять решение на оптимальность не требуется.

Время выполнения – 45 минут.

Критерии оценки: для получения оценки «зачтено» необходимо набрать 10 баллов при максимально возможной сумме 40 баллов.

Итого:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |   |

При дистанционном обучении устный опрос, в том числе защита курсовых работ, проводятся в Microsoft Teams. Практические задания и письменные ответы размещаются в системе Moodle. Тестирование осуществляется в системе Moodle.

## 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств

### 4.2.1. Критерии оценивания на зачете

«Зачтено» (45-60 баллов) – выставляется, если студент в полном объеме выполнил решение предложенной задачи и ответил на теоретический вопрос, либо допустил неточности в решении (допустил вычислительные ошибки при общей правильности использования методов) и в ответе на теоретический и дополнительные вопросы. «Зачтено» соответствует критериям «отлично», «хорошо», либо «удовлетворительно» таблицы п. 4.3.

«Не зачтено» (до 45 баллов) – выставляется, если студент не смог выполнить решение практической задачи, не знает методов решения задач,



не может дать ответ на теоретический вопрос. «Не зачтено» соответствует критерию «неудовлетворительно» таблицы п. 4.3.

### 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

| Код компетенции | Планируемые результаты обучения по дисциплине  | Критерии оценивания   |   |   |   |
|-----------------|--|---|---|---|---|
|                 |  | <b>Отлично</b><br>Высокий уровень освоения проверяемых компетенций  | <b>Хорошо</b><br>Средний уровень освоения проверяемых компетенций   | <b>Удовлетворительно</b><br>Базовый уровень освоения проверяемых компетенций  | <b>Неудовлетворительно</b><br>Недостаточный уровень освоения проверяемых компетенций  |
| ОПК-1           | <i>Знать:</i> понятия, методы, теоремы и факты вариационного исчисления<br><i>Уметь:</i> решать задачи вариационного исчисления<br><i>Владеть:</i> основными понятиями, теоремами, законами вариационного исчисления для решения задач профессиональной деятельности | <i>Знает:</i> понятия, методы, теоремы и факты вариационного исчисления<br><i>Умеет:</i> решать задачи вариационного исчисления<br><i>Владет:</i> основными понятиями, теоремами, законами вариационного исчисления для решения задач профессиональной деятельности | <i>Знает:</i> понятия, методы, теоремы и факты вариационного исчисления, но допускает несущественные ошибки<br><i>Умеет:</i> решать задачи вариационного исчисления, но допускает несущественные ошибки<br><i>Владет:</i> основными понятиями, теоремами, законами вариационного исчисления для решения задач профессиональной деятельности, но допускает несущественные ошибки | <i>Знает:</i> в ограниченном объеме понятия, методы, теоремы и факты вариационного исчисления<br><i>Умеет:</i> в ограниченном объеме решать задачи вариационного исчисления<br><i>Владет:</i> в ограниченном объеме основными понятиями, теоремами, законами вариационного исчисления для решения задач профессиональной деятельности | <i>Не знает:</i> понятия, методы, теоремы и факты вариационного исчисления<br><i>Не умеет:</i> решать задачи вариационного исчисления<br><i>Не владеет:</i> основными понятиями, теоремами, законами вариационного исчисления для решения задач профессиональной деятельности |



Уровни сформированности компетенций определяются следующим образом:

1. Высокий уровень соответствует оценке “отлично” (“зачтено”), и предполагает:
  - готовность к самостоятельной профессиональной деятельности;
  - глубокое и правильное усвоение программного материала, последовательное, грамотное и логически стройное его изложение;
  - владение основными методами и алгоритмами решения задач;
  - умение строить математические модели, увязывать теорию с практикой, применять знания.
2. Средний уровень соответствует оценке “хорошо” (“зачтено”) и предполагает:
  - твердое знание программного материала, его изложение грамотное и по существу;
  - владение основными методами;
  - отсутствие существенных ошибок, но затруднения в выводах и доказательствах;
  - умение применять основные положения для решения задач.
3. Базовый уровень соответствует оценке “удовлетворительно” (“зачтено”), и предполагает:
  - знания только основного материала, неумение делать выводы и проводить доказательства;
  - ошибки, недостаточно правильные формулировки;
  - трудное увязывание основных положений с практикой.
4. Низкий уровень соответствует оценке “неудовлетворительно” (“не зачтено”) и предполагает:
  - незнание основополагающих вопросов изучаемого курса или значительной части программного материала;
  - ошибки, неумение их исправлять;
  - неумение увязать теорию с практикой.

